Hermite-Polynome

Die auf der gesamten reellen Achse $x \in [-\infty, +\infty]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\rho(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ orthogonalen Polynome $H_k(x)$ vom Grad k heißen *Hermite-Polynome*. Ihre Definition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-x^2} \, H_k(x) \, H_\ell(x) \ = \ h_k \, \delta_{k\ell} \qquad \text{mit} \quad h_k = 2^k k! \sqrt{\pi} \qquad \text{für} \quad k, \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

legt die Normierung mit fest. Bestimmen Sie H_0, H_1 und H_2 auf vier Arten:

(a) *Orthogonalisierung*
Gehen Sie mit dem Ansatz $H_0 = a_0$, $H_1 = a_1 x + b_1$, $H_2 = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$ in die obige Definition für $k, \ell = 0, 1, 2$ und berechnen Sie die Koeffizienten.

Hilfe: $\int \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, $\int x^2 \, \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\int x^4 \, \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

(b) *Rekursionsformel*
Starten Sie mit $H_0 = 1$ und (formal) $H_{-1} = 0$ in die Beziehung $H_{n+1} = 2x \, H_n - 2n \, H_{n-1}$.

(c) *Ableitungsformel*
Die Hermite-Polynome sind alternativ definiert über $H_n(x) \ = \ (-1)^n \, \mathrm{e}^{x^2} \, \partial_x^n \, \mathrm{e}^{-x^2}$.

(d) *Erzeugende Funktion*
Wenn man die Funktion $G(t, x) \ := \ \mathrm{e}^{2tx - t^2} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H_k(x)$ nach t-Potenzen sortiert, purzeln die Hermite-Polynome heraus.

Fourier-Reihen

Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ lässt sich gemäß Vorlesung darstellen als

$$f(x) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \qquad \text{wobei} \qquad c_n \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_P \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \, f(x)$$

und P ein Periodenintervall bezeichnet.

(a) *Sägezahn*
Wir wählen $P = [-\pi, +\pi)$ und setzen die Funktion $f(x) = x$ außerhalb des Intervalls mit $f(x{+}2\pi) = f(x)$ periodisch fort. Berechnen Sie die c_n und leiten Sie aus der Fourier-Reihe am Punkt $x = \frac{\pi}{2}$ die *Leibniz-Formel* für $\frac{\pi}{4}$ ab.

Hinweis: Werten Sie die Integrale mit partieller Integration aus. $\int_P \mathrm{d}x \ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} = 2\pi \, \delta_{n0}$. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2} = \mathrm{i}^n$.

(b) *Parabel-Zahn*
Wir nehmen $P = [0, 2\pi)$ und setzen die Funktion $f(x) = x^2$ außerhalb des Intervalls mit $f(x{+}2\pi) = f(x)$ periodisch fort. Bestimmen Sie wiederum die c_n und stellen Sie x^2 durch seine Fourier-Reihe dar. Man kann zeigen, dass Fourier-Reihen an Sprungstellen x_s gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}(f(x_s{+}\epsilon) + f(x_s{-}\epsilon))$ konvergieren. Verwenden Sie diese Kenntnis, um mit $x{=}0$ die *Euler-Formel* für $\frac{\pi^2}{6}$ herzuleiten.

Hinweis: Gleiches Vorgehen wie in (a). c_0 ist speziell zu behandeln.